PRUEBA DE CÁLCULO (GRUPO 3M-B)
25-2-2014

APELLIDOS: ....
NOMBRE: .... SOLUCIONES ....

1. (1 punto) Dada la sucesión

$$-1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{1}{7}, -1, \frac{1}{8}, \ldots,$$

responda, razonando las respuestas, a las siguientes cuestiones:

a) ¿Es convergente o divergente? Llamando a_n al término general, se tiene:

$a_{2n-1} = -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n-1} = -1$
$a_{2n} = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$
$\Rightarrow \{a_n\}$ ni converge ni diverge pues tiene dos subsucesiones con límites distintos

b) ¿Es monótona? No, pues $a_{2n-1} = -1 < a_{2n} = \frac{1}{n} > a_{2n+1} = -1 \quad \forall n$.

c) ¿Es acotada? Sí. Una cota inferior es cualquier nº real $m \leq -1$ y una cota superior es cualquier nº real $M \geq \frac{1}{2}$ (de hecho $a_n \in [-1, 1/2]$ $\forall n \in \mathbb{N}$).

2. (1 punto) Dadas las sucesiones

(1) $-1, -1, -1, -1, -1, -1, -1, \ldots$
(2) $\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{1}{7}, -1, \frac{1}{8}, \ldots$
(3) $-1, \frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, -1, \frac{1}{4}, -1, \frac{1}{5}, -1, \frac{1}{6}, -1, \frac{1}{7}, -1, \frac{1}{8}, \ldots,$

¿Cuáles de ellas son subsucesiones de la sucesión del ejercicio 1? Justifique la respuesta y, en el caso de que alguna sea subsucesión encuentre una sucesión de números naturales asociada.

(1) es una subsucesión de $\{a_n\}$ pues se identifica con $\{a_{n_k}\}$ donde $\{n_k\}$ (sucesión de índices) es una sucesión de nº naturales estrictamente creciente. Por ejemplo $n_k = 2k-1$, y entonces (1) es la subsucesión de los términos impares de $\{a_n\}$.

(2) es una subsucesión pues viene dada por $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$, es decir, está asociada a la sucesión de nº naturales $\{n+1\}_{n=1}^{\infty}$, que es estrict. creciente.

(3) no es una subsucesión. Si lo fuera debería ser de la forma $\{a_{n_k}\}$ y $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ estrictamente creciente. Pero eso no puede ser pues si $a_{n_2} = \frac{1}{3}$, que corresponde al término a_4, entonces a_{n_4} sólo puede ser -1 ó $\frac{1}{n}$ con $n > 3$, ya que $n_4 > n_2 = 4$. (ver nota al final)

3. Calcule los siguientes límites:

(1 punto) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\arctan(n^2+2n+3)}{\ln n}$ (ver otra forma al final)

- $\{\operatorname{arctg}(n^2+2n+3)\}_{n=1}^{\infty} \subset [-\pi/2, \pi/2]$ (suc. acotada)
- $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\ln n} = 0$ pues $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n = +\infty$ y $\ln n > 0$ $\forall n \geq 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{arctg}(n^3+2n+3)}{\ln n} = 0$

(1,5 puntos) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+5^{n+1}}{2^{n-1}+8^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5^n[(4/5)^n+5]}{8^n[(2/8)^n \cdot 1/2 + 1]} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{5}{8}\right)^n \cdot \dfrac{(4/5)^n+5}{(2/8)^n \cdot \frac{1}{2} + 1} = 0 \cdot 5 = 0$

$\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0 \text{ si } |r|<1}$

(1,5 puntos) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^3+2n}{n^3+1}\right)^{3n^2} \overset{1^\infty}{=} \lim \left(1 - 1 + \dfrac{n^3+2n}{n^3+1}\right)^{3n^2} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{2n-1}{n^3+1}\right)^{\frac{n^3+1}{2n-1}}\right]^{\frac{2n-1}{n^3+1}\cdot 3n^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \left[\left(1+\dfrac{2n-1}{n^3+1}\right)^{\frac{n^3+1}{2n-1}}\right]^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3-3n^2}{n^3+1}}$

$= e^6$. Se ha usado que $\lim\limits_{n\to\infty}(1+a_n)^{1/a_n} = e$ siendo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ y $a_n = \dfrac{2n-1}{n^3+1}$

(2 puntos) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+n}}\right)$

$\forall k = 1, \ldots, n$ se tiene: $\dfrac{3}{\sqrt{n^2+n}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{n^2+k}} \leq \dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}}$ y sumando en k

se obtiene: $a_n = n \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n^2+n}} \leq \underbrace{\dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}} + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+2}} + \cdots + \dfrac{3}{\sqrt{n^2+n}}}_{b_n} \leq n \cdot \dfrac{3}{\sqrt{n^2+1}} = c_n$

Además:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1+1/n}} = 3$

$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3}{\sqrt{1+1/n^2}} = 3$

Entonces, la regla del sandwich, asegura que $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 3$

4. Demuestre que la siguiente sucesión recurrente es convergente y calcule su límite:

$$\begin{cases} a_1 = 5/3 \\ a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n} \end{cases}.$$

4.- $\begin{cases} a_1 = 5/3 \\ a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n} \end{cases}$

Si la sucesión fuese convergente, entonces debería existir $a \in \mathbb{R}$ tal que $a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$ y, por tanto, "a" debría verificar:

$$a = \sqrt{4+3a} \quad (*)$$

luego

$$a^2 - 3a - 4 = 0,$$

cuyas soluciones son $a = 4$ y $a = -1$, pero $a = -1$ no verifica (*).
En consecuencia, si existe $\lim_{n\to\infty} a_n$, éste debe ser 4.

Así sólo falta demostrar que el límite existe. Para ello vamos a ver que la sucesión es monótona y acotada (por inducción); pues un teorema asegura que en ese caso existe el límite.

a) $\{a_n\}$ es monótona creciente; $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) Es cierto para $n = 1$: $a_1 = \frac{5}{3} \le a_2 = \sqrt{4+3\cdot\frac{5}{3}} = 3$

2) Supongamos que es cierto para n y veamos que, en ese caso, también lo es para $n+1$:

$$\underset{\text{(hipótesis inducción)}}{a_n \le a_{n+1}} \Rightarrow 3a_n \le 3a_{n+1} \Rightarrow 4+3a_n \le 4+3a_{n+1}$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n} \le \sqrt{4+3a_{n+1}} = a_{n+2}$$

luego, es cierto para $n+1$.

De 1) y 2), el principio de inducción asegura que $a_n \le a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

b) Veamos que 4 es una cota superior de a_n, esto es, hay que demostrar (por inducción) que $a_n \le 4$ $\forall n \in \mathbb{N}$:

1) Es cierto para $n = 1$ pues $a_1 = \frac{5}{3} \le 4$.

2) Supongamos que es cierto para n (es decir, $a_n \le 4$) y veamos que entonces lo es para $n+1$:

$$\underset{\text{hip. ind.}}{a_n \le 4} \Rightarrow 3a_n \le 3\cdot 4 \Rightarrow 4+3a_n \le 4+3\cdot 4 \Rightarrow a_{n+1} = \sqrt{4+3a_n} \le \sqrt{16} = 4$$

Por tanto, el principio de inducción permite asegurar que 4 es una cota superior de $\{a_n\}$.

En conclusión, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$.

NOTAS:

Sobre el ejercicio 2: Una subsucesión de una dada $\{a_n\}$ es la elección de infinitos términos de $\{a_n\}$ ordenados según el orden en que aparecen en $\{a_n\}$. Esto lo verifican (1) y (2), y "mantener el orden que tiene en $\{a_n\}$" significa que los índices forman una sucesión $\{n_k\}$ estrictamente creciente. En (3) no pasa esto porque se han intercambiado 2 términos de $\{a_n\}$ y, además, en $\{a_n\}$ no se repite ninguno.

Otra forma de calcular:

- $$\lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(n^2+2n+3)}{\ln n}$$

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \\ \lim\limits_{n\to\infty} (n^2+2n+3) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n^2+2n+3) = \frac{\pi}{2}.$$

y como $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$,

entonces: $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{arctg}(n^2+2n+3) \cdot \frac{1}{\ln n} = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$

- $$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^3+2n}{n^3+1}\right)^{3n^2} \underset{\boxed{\lim a_n^{b_n} = e^{\lim b_n(a_n-1)}\ (1^\infty)}}{=} e^{\lim\limits_{n\to\infty} 3n^2\left(\frac{n^3+2n}{n^3+1}-1\right)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n^3-3n^2}{n^3+1}} = e^6$$